



## **COMPLEJIDAD ECONÓMICA DESDE LA PERSPECTIVA CAÓTICA<sup>1</sup>**

Sary Levy Carciente  
FACES-UCV

**Resumen:**

Para profundizar en la comprensión de los fenómenos económicos, sus modelos explicativos han de incorporar la irreversibilidad temporal y la falta de linealidad de los procesos económicos, con lo que se arriba a dinámicas caóticas, complejas o no-lineales. La perspectiva caótica ofrece la posibilidad de dar explicaciones intrínsecas a comportamientos irregulares de dinámicas económicas, evitando múltiples explicaciones *ad hoc*. La teoría del caos permite adentrarnos en una visión que pone a la multiplicidad, la complejidad y la dinámica por encima de los modelos lineales, automáticos y simplistas, por lo que resulta en mayor sintonía con la actual dinámica económica.

**Palabras claves:** Caos, complejidad, no linealidad, dinámica económica, dinámica no-lineal, irreversibilidad temporal.

### **I. INTRODUCCIÓN**

Como toda práctica humana, el intercambio económico es un proceso complejo, multi-causal, un proceso dinámico, que genera transformaciones en el tiempo, unas de forma inmediata, otras paulatinamente. En un afán de asemejar los modelos económicos a las realidades que refieren, surge la necesidad de dinamizar los modelos y reconocer los mecanismos de transmisión de las variables explicativas para evaluar los resultados parciales y finales de determinadas transformaciones.

La dinámica es el estudio del cambio, la economía dinámica es el estudio sistemático del cambio económico, es decir, en la producción, el consumo, el comercio, la colocación de recursos, los precios y el bienestar. Para modelar procesos que involucran velocidades de cambio se utilizan ecuaciones

---

<sup>1</sup> Este texto recoge avances de investigación de la autora para su tesis doctoral y de las adelantadas en el proyecto "No Linealidad y Dinámica Económica" adscrito a la Unidad de Investigación en Asuntos Internacionales del Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales de la FACES-UCV. La autora agradece los aportes y comentarios de Gerardo Navarro a borradores del artículo.



diferenciales, teniendo como consecuencia que su solución, si existe, es única. De esta manera, conociendo las condiciones iniciales del sistema y las leyes que lo regulan, se puede predecir el estado final del sistema.

Todo sistema dinámico conservativo<sup>2</sup> cumple con las características anteriores. Una propiedad importante de estos sistemas es que el cambio del signo del tiempo, es decir, reemplazar  $t$  por  $-t$ , no tiene incidencia alguna, por lo tanto su mecánica es bidireccional. Estamos en presencia de un sistema reversible en el tiempo. Pero dinamizar realmente un modelo es incorporar la *flecha del tiempo*. En el mundo económico resulta difícil considerar válida la proposición de la reversibilidad temporal: no existe posibilidad de reconfigurar el conjunto de condiciones iniciales para repetir un proceso, como tampoco la posibilidad fáctica de anular un proceso con otro de sentido inverso o contrario. Si además, a los modelos dinámicos se le incorpora la falta de linealidad de los procesos económicos, arribamos a dinámicas caóticas, complejas o no-lineales en los sistemas económicos<sup>3</sup>.

### II. CAOS, COMPLEJIDAD, DINÁMICA NO-LINEAL: GENERALIDADES

*“Las teorías y la ciencia, cuando pierden su complejidad, se convierten en ideologías” (Edgar Morin, 1992).*

Según Hayles (1990) nuestro uso de la palabra caos deriva del griego κενό que significa vacío y que generalmente es percibido con carácter negativo o de vacuidad abismal. Asimismo, sugiere que el contraste entre orden y caos tiene su origen en la dicotomía occidental, distinta por ejemplo a la lógica cuaternaria del taoísmo, en la que la falta de orden (no-orden) no es equivalente a su opuesto (anti-orden).

Sin embargo, la perspectiva de caos en la comunidad científica actual es distinta a aquella tradicional y define caos como un comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinístico. El caos es conceptualizado como extremadamente complejo, pero no como carente de orden; por ende es un estado determinístico, es decir, su movimiento o dinámica sigue leyes precisas,

---

<sup>2</sup> También conocidos como sistemas hamiltonianos, en honor a W. Hamilton, quien estudiara estos sistemas y describiera su comportamiento con una función matemática que utiliza como variables las posiciones y los impulsos (producto de velocidad por masa). Como ejemplos característicos se tienen al sistema solar y al plasma en un acelerador de partículas.

<sup>3</sup> En este escrito se asumirán como sinónimos los términos de comportamientos caóticos, complejos y no-lineales.



aunque su conducta irregular pueda parecer aleatoria. Lo anterior significa que de su entendimiento se pretenden derivar instrumentos que nos permitan guiar nuestras acciones, aunque de formas distintas a las acostumbradas, pues no tendrán el tradicional carácter lineal.

La teoría del caos abre cuestionamientos a la aparente certeza, linealidad y predictibilidad propias del universo newtoniano. Es el resultado de descubrimientos en el campo de las dinámicas no-lineales, que no es otra cosa que el estudio de la evolución temporal de sistemas no-lineales, revelando un comportamiento que provoca relaciones inestables entre variables. Vale destacar que la ocurrencia del caos no es rara o patológica, sino justo lo contrario, y cada día más desde las diversas ramas del disciplinar surgen ejemplos de ello, lo que le da en principio a este tipo de perspectiva un carácter multi, inter o transdisciplinario.

### III. CAOS ECONÓMICO

El concepto de sistemas complejos y abiertos es claramente aplicable a lo económico, de ahí la importancia de entender su dinámica. Caos es de considerable valor para evaluar la complejidad de los sistemas tras su evolución en el tiempo, ya que destaca cómo las condiciones iniciales del sistema influyen en su eventual estructura y comportamiento. Trabajar con la no-linealidad implica estar atentos a la sensibilidad de las condiciones iniciales, lo que deriva en problemas de exactitud de la medición. Vale señalar su vinculación con el término interacción<sup>4</sup>, pues la causalidad en ella siempre es compleja y las causas generalmente pueden interactuar de forma no aditiva<sup>5</sup>. Además, en los sistemas no-lineales no funciona la ley de los grandes números<sup>6</sup>, lo que complica el proceso de predicción. Caos abre nuevas posibilidades a las ciencias sociales, pero también presenta sus escollos.

Aunque los estudios de caos y su especificación matemática surgen de las 'ciencias exactas', su concepción intuitiva puede ser vista en clásicos pensadores como Marx quien, por medio de la dialéctica y el materialismo

---

<sup>4</sup> Interacción en el sentido estadístico: dadas dos variables cuya interrelación es modificada por la acción de una tercera.

<sup>5</sup> La no-aditividad implica que el efecto combinado total no es igual a la suma de los efectos parciales.

<sup>6</sup> La ley de los grandes números nos dice que en la medida que la muestra es de mayor tamaño, la desviación o fluctuación se hace menor.



histórico, planteara que en determinados momentos históricos, y por la dinámica interna del sistema, una profunda transformación cuantitativa puede dar lugar a una cualitativa:

“En un cierto grado de su desarrollo, las fuerzas de producción materiales de la sociedad entran en conflicto con las relaciones de producción existentes (...) Se inicia entonces una era de revolución social” (Marx, K. ([1859]s.f.),10).

En el plano económico, se ha observado como variables microeconómicas (precios y cantidades), macroeconómicas (producción, consumo, inversión, empleo, nivel salarial y de precios, interés y oferta monetaria), o aquellas utilizadas para evaluar el crecimiento (producción industrial, capital, población, ciclos de los negocios) y el desarrollo (estructura, organización), están sometidas a fluctuaciones irregulares, y a pesar de esto pueden describirse por dinámicas sencillas.

Por otro lado, no existe evidencia de que la data económica converja a un estado estacionario, manifieste un crecimiento constante o tenga ciclos periódicos. En este sentido, la perspectiva del caos permitiría, conociendo las características cualitativas de la data, dar posible explicaciones intrínsecas, por medio de variables endógenas al comportamiento irregular del sistema, evitando las innumerables explicaciones *ad hoc* a fenómenos en esencia equivalentes (Day, 1994).

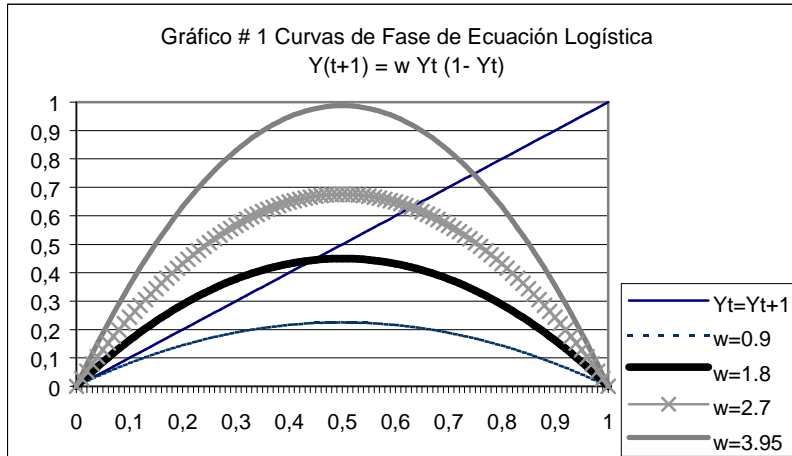
#### IV. ECUACIÓN LOGÍSTICA

Muchas de las aplicaciones de la dinámica de caos a problemas económicos son adaptaciones de la ecuación diferencial no-lineal:

$$Y_{(t+k)} = F(Y_t)$$

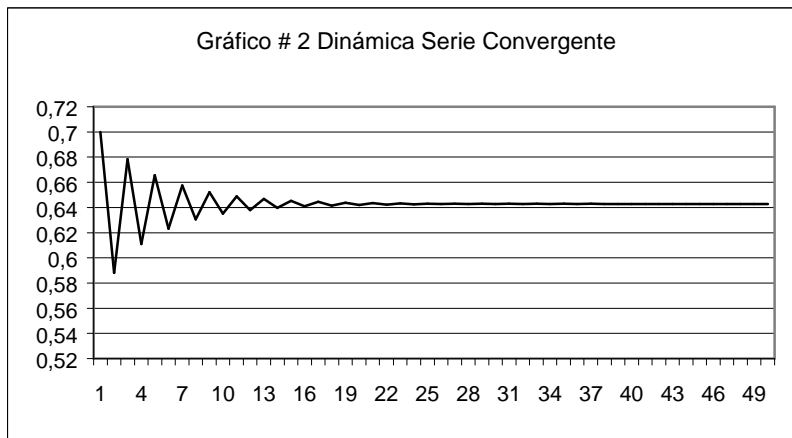
donde cualquier sistema posee dos elementos en común: su dinámica no-lineal y un rezago en el tiempo ( $k$ ).

La ecuación más sencilla para explicar este comportamiento es la función cuadrática con un sólo parámetro:  $Y_{t+1} = wY_t(1 - Y_t)$  conocida como la ecuación o mapa logístico, cuya curva de fase se observa en el Gráfico # 1 para diversos valores de 'w'.

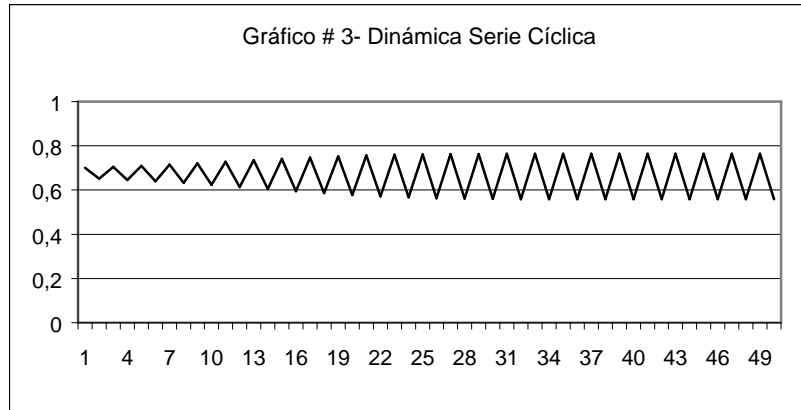


La dinámica de la ecuación logística permite observar los comportamientos previstos (convergente, cíclico y caótico) ante iteraciones, dependiendo de los valores del coeficiente ' $w$ '. En este sentido hay cuatro posibles casos:

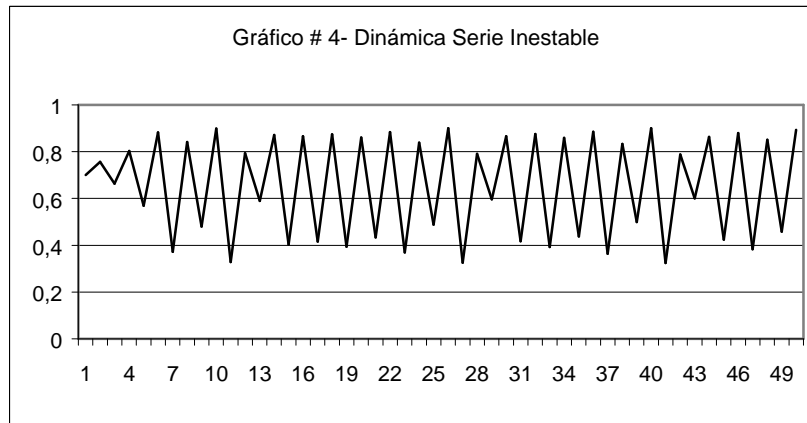
- $w < 1$ , la curva de fase no se intercepta con la recta de  $45^\circ$  en el cuadrante positivo (Gráfico # 1).
- $1 < w < 2$ , la pendiente de la curva de fase en el punto de intersección con la recta de  $45^\circ$  es positiva, por lo que su dinámica será convergente (Gráfico #1, y Gráfico #2).



- $2 < w < 3$ , la pendiente de la curva de fase en el punto de intersección con la recta de  $45^\circ$  es negativa, pero de valor absoluto menor a la unidad (Gráfico # 1 y Gráfico # 3).



- $w > 3$ , la pendiente de la curva de fase en el punto de intersección con la recta de  $45^\circ$  es negativa y con valor absoluto mayor a la unidad (Gráfico # 1 y Gráfico # 4).



En los dos últimos casos, al ser la pendiente de la curva de fase negativa en el punto de intersección, su dinámica será oscilatoria, pero en el último caso, como su valor absoluto es mayor a la unidad, las fluctuaciones serán cada vez de mayor amplitud, estando en presencia de un equilibrio inestable. En la medida que 'w' se incrementa, la dinámica mostrada por la serie será cada vez más inestable y al acercarse a determinados valores ( $w > 4$ ) se hará caótica.



Matemáticamente, se deduce lo anterior como sigue:

$$F(Y_t) = Y_{(t+1)} = wY_t(1 - Y_t) = wY_t - wY_t^2$$

$$G(Y_t) = Y_{(t+1)} = Y_t$$

En equilibrio:  $F(Y_t) = G(Y_t)$  ó  $Y_t = Y_{(t+1)} = Y_E$ , en consecuencia

$$wY_E(1 - Y_E) = Y_E; \quad w(1 - Y_E) = 1; \quad Y_E = (w - 1) / w \quad (1)$$

Por otra parte,

$$\frac{dY_{t+1}}{dY_t} = w(1 - 2Y_t) \quad (2)$$

sustituyendo (1) en (2), se produce

$$\frac{dY_{t+1}}{dY_t} = w(1 - 2[(w - 1)/w]) = -w + 2$$

Los puntos de equilibrio podrán ubicarse en diferentes momentos de la dinámica de la función, las cuales se establecen por el valor de su pendiente y que dependerán del valor de 'w':

- |                |    |         |
|----------------|----|---------|
| - $w + 2 > 0$  | => | $w < 2$ |
| - $w + 2 = 0$  | => | $w = 2$ |
| - $w + 2 < 0$  | => | $w > 2$ |
| - $w + 2 = -1$ | => | $w = 3$ |
| - $w + 2 < -1$ | => | $w > 3$ |

de donde, en el intervalo  $2 < w = 2$ , la dinámica es monótona (sin fluctuaciones); en  $2 < w < 3$  la dinámica es cíclica convergente; a partir de  $w \geq 3$  la dinámica se transforma sustancialmente y comienza a manifestar un ciclo convergente y cuando  $w > 4$  estamos en presencia de una dinámica caótica.

#### V. DETECTANDO CAOS

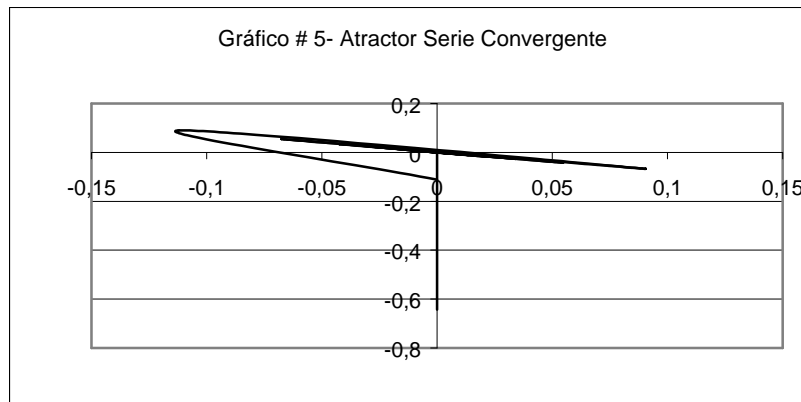
Una serie que a primera vista se presenta errática puede, efectivamente, ser aleatoria o por el contrario, ser la manifestación de un sistema determinístico no-lineal y su dinámica ser caótica. Existen diversas maneras a través de las cuales se puede identificar el caos en un sistema: reconstruyendo la función generadora de la serie, por el funcionamiento de los atractores extraños, siguiendo los diagramas de bifurcación, analizando el perfil de las estructuras fractales o utilizando el exponente de Lyapunov.

## V.1. Atractores

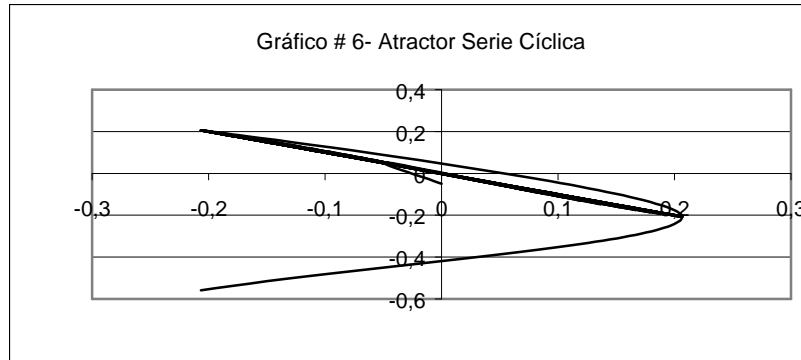
En el caos hay cierto orden subyacente conocido como los atractores extraños. Baumol y Benhabib (1989) lo definen como un grupo de puntos hacia los cuales se tiende; Pool (en Gleick, 1987), como un grupo de puntos en una fase espacial que se corresponden a todos los diferentes estados del sistema.

Dicho de otra forma, la evolución temporal del sistema pareciera estar consistentemente halado por ciertos puntos matemáticos que nos permiten conocer la estructura subyacente del sistema y la tendencia de su comportamiento en el tiempo. Entonces, los atractores representan la estructura dinámica que traza el comportamiento en el tiempo del sistema. Son las estructuras que dominan el sistema no-lineal durante su evolución temporal. Es una región o fase del espacio en la cual la dinámica no-lineal converge. Un atractor es por tanto, un estado de equilibrio, es el orden sistémico. Los atractores pueden ser de tres tipos: de punto, cíclicos y extraños o de formas inesperadas.

Los atractores de punto se presentan en las series convergentes, por ende, son un punto al que se aproximan las trayectorias. Es el punto de equilibrio al que tiende el sistema.



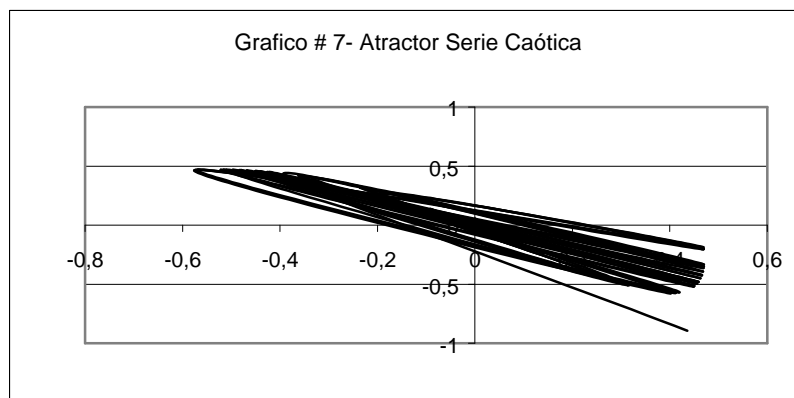
Los atractores cíclicos tienen una dinámica cuya gráfica se observa como oscilaciones, manifestando los máximos y mínimos a los que arriba el sistema en el tiempo.



Por su parte, los atractores de las series caóticas son una porción del espacio en la cual queda circunscrito la evolución del sistema, pero donde ninguno de los puntos se vuelven a presentar, por lo que su gráfica muestra formas diversas o extrañas, de ahí su nombre. Los atractores extraños generan flujos contrayendo el volumen en ciertas direcciones y expandiéndolo en otras.

Las propiedades de los atractores extraños son básicamente tres:

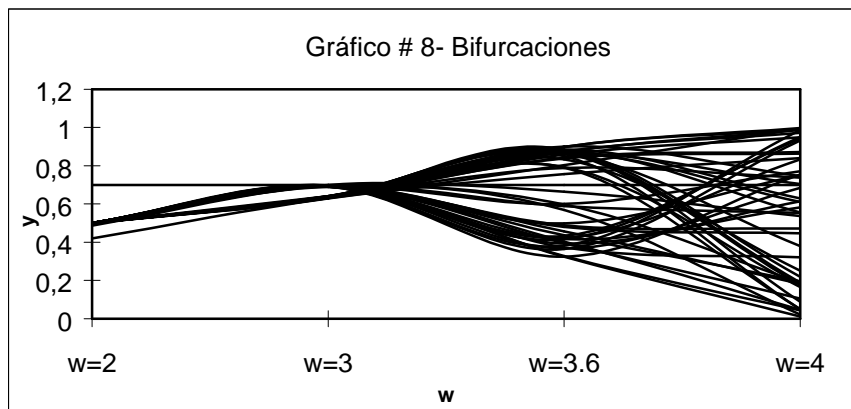
- no pueden descomponerse en porciones menores.
- existe una notable irregularidad en la estructura física o dimensión del atractor, por lo que tiene una dimensión no entera, violando, por ejemplo, las leyes del espacio euclidiano.
- son muy sensibles a las condiciones iniciales del sistema.



*V.2. Bifurcaciones*

Las bifurcaciones se desencadenan cuando sistemas complejos están sobre-tensionados, empujados más allá de su umbral de aparente estabilidad y su nuevo comportamiento ya no es predecible. Por lo general, posteriormente surge una nueva variedad de orden, pero esto no ocurre linealmente, presentando el camino innumerables saltos y sorpresas. Las bifurcaciones dan un nuevo rol a las predicciones, pues aunque el comportamiento de los sistemas no-lineales en determinados momentos es impredecible, si puede anticiparse su desencadenamiento.

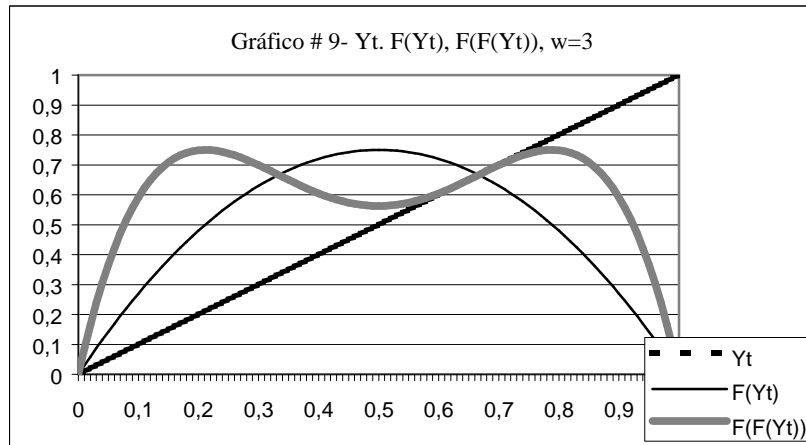
En los sistemas dinámicos, la teoría de la bifurcación refiere un cambio de fase en el comportamiento de los sistemas construidos matemáticamente cuando se desplazan de un tipo de atractor a otro (por ejemplo, de convergente a cíclicos o a extraños). Cerca de la bifurcación los valores de la fluctuación se incrementan dramáticamente.



En 1978, Mitchell Feigenbaum encontró esos puntos en los cuales los sistemas se transforman sustancialmente. Utilizando primero la ecuación logística y luego la función senoidal, verificó que todas las funciones no-lineales convergen en determinados números y que a partir de ellos se establece un período de desviación duplicada. Su teoría expresa una ley natural universal sobre los sistemas en el punto de transición entre un comportamiento ordenado y otro turbulento (Gleick, 1987:157).

Entonces, el sistema podrá originalmente presentar una dinámica monótona (sin fluctuaciones) convergente a un valor determinado, luego una dinámica cíclica pero convergente en dichos valores y posteriormente presentar una

cascada de bifurcaciones dobladas (bifurcaciones en ciclos estables de períodos pares: 2, 4, 8, ...).



Para explicar la emergencia de la primera bifurcación, el gráfico # 9 muestra la relación de las dos curvas de fase de la ecuación logística,  $F(Y_t)$  y  $F[F(Y_t)]$ . Se observa que ambas tienen raíces comunes, así como el mismo punto de equilibrio, siendo en él la pendiente de la curva de  $F[F(Y_t)]$  el cuadrado de la pendiente de  $F(Y_t)$ <sup>7</sup>. En la medida que el parámetro 'w' se modifica, así lo hace la dinámica de ambas curvas:

- Si  $2 < w < 3$ , la pendiente de la curva de fase de  $F[F(Y_t)]$  será positiva, por lo que la dinámica será convergente.
- Si  $w = 3$ , la pendiente de la curva de fase de  $F[F(Y_t)]$  es perpendicular a  $Y_t$ , por lo que su pendiente tendrá un valor de  $-1$ . Al ser negativa tendrá una dinámica oscilatoria, pero su valor absoluto igual a la unidad la mantendrá convergente.

<sup>7</sup> La pendiente de la curva  $F(Y_t)$  es su primera derivada,  $(F(Y_t))' = F'$  y la derivada de  $(F(F(Y_t)))' = F'F' = (F')^2$



- Si  $w > 3$ , la pendiente de la curva de fase de  $F[F(Y_t)]$  será negativa y su valor absoluto mayor a la unidad. En este caso estaremos en presencia de una dinámica que se bifurca cada cierto tiempo.

Pero a pesar de la complejidad que pudiese expresar un ciclo estable de periodicidad infinita par ( $2n$ , con  $n \rightarrow \infty$ ), éste no presenta una dinámica caótica. Li y Yorke (1975) señalan que una dinámica caótica emerge cuando el ciclo generado es impar. Es entonces cuando el nuevo atractor será extraño, es decir, nunca repetirá su comportamiento pasado. El teorema de Li-Yorke señala que:

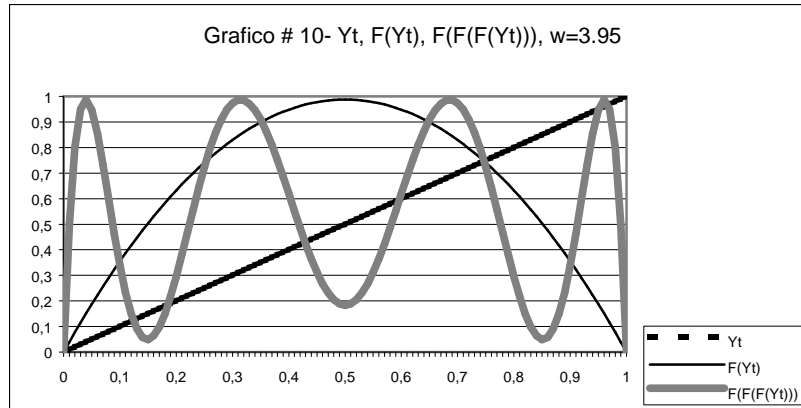
Dada una función diferencial continua,  $F$ , en el intervalo  $[a, b]$  tal que:

$$a \leq Y_t \leq b; \quad a \leq Y_{t+1} \leq b; \quad F(Y_t) > Y_t; \quad F(F(Y_t)) > Y_t; \quad \text{pero} \\ F(F(F(Y_t))) < Y_t,$$

entonces:

- para cualquier entero  $k > 1$  existe un valor inicial en el intervalo  $[a, b]$  ( $Y_0$ ) cuyo siguiente valor ( $Y_t$ ) depende del ciclo de período  $k$ ,
- dado un subconjunto infinito  $S$  al que pertenecen los valores iniciales  $(X_0, Y_0)$  en el intervalo  $[a, b]$ , habrá un período inicial en el cual la distancia entre sus dinámicas tenderá a anularse, luego otro en el cual tras anularse volverá a incrementarse de forma cíclica, para finalmente no converger asintóticamente en ningún punto y por ende presentar un atractor extraño.

De manera análoga a la bifurcación explicada, el gráfico #10 muestra la relación de  $F(Y_t)$  y  $F(F(F(Y_t)))$ , que para valores de 'w' cercanos a 4, cruza la curva  $Y_t$  siete veces y seis veces a  $F(Y_t)$ . Estos seis puntos de intersección corresponden a dos ciclos de tres períodos, uno de ellos estable y otro inestable.



### V.3. Fractales

Un atractor extraño es una curva fractal, por ende su forma geométrica no estará dentro del espacio euclidiano. La idea de dimensión fractal es más claramente percibida en contraposición a la de dimensión entera que se presenta en el espacio euclidiano donde:

- la longitud de un objeto está ubicada en un espacio unidimensional o de dimensión de grado uno, y a medida que se incrementa la longitud del objeto así lo hará su medida ( $M$ ):  $M = a L^1$
- el área de una circunferencia se ubica en un espacio bidimensional y su medida variará proporcionalmente a la longitud del radio de la misma:  $M = a L^2$
- la capacidad de un cubo refiere un espacio tridimensional, que variará proporcionalmente a la longitud de sus lados:  $M = a L^3$

Entonces, en el espacio euclidiano las dimensiones espaciales son enteras (y se representan por números naturales). En el caso de una forma fractal, su medida variará en proporciones fractales (en fracciones) a lo que se modifique su longitud:  $M = a L^F$ , con  $F \in Q$  (conjunto de los números reales).

Un fractal es entonces, una forma geométrica que se repite a sí misma en cualquier escala a la que se observe. Su característica básica es por tanto, la



autosemejanza o autosimilitud<sup>8</sup>. Esta propiedad está presente en las bifurcaciones en cascada que presenta una ecuación logística al incrementar el valor de 'w'.

#### V.4. Exponente de Lyapunov

El exponente de Lyapunov es quizá la medida más clara que prueba la existencia y mide la cantidad de caos en un sistema dinámico o serie de tiempo. Se dice que hay caos cuando las predicciones en el largo plazo son imposibles, cuando la incertidumbre sobre el estado inicial de un sistema crece exponencialmente, cuando la función de auto correlación tiende a cero (0) en un tiempo finito.

Cuando un sistema evoluciona a partir de dos estados iniciales que difieren ligeramente ( $\epsilon$ ), tras un número ' $n$ ' de iteraciones su divergencia se caracteriza por:

$$e(n) \approx \epsilon e^{In}$$

donde  $I$ , el exponente de Lyapunov, indica la divergencia promedio (de alejamiento o atracción) entre dos puntos tras cada iteración. Siendo:

---

<sup>8</sup> El más antiguo de los fractales es el de Cantor (1883) cuya longitud es nula con dimensión de 0.62309 ( $\log 2 / \log 3 \approx 0.62309$ ) por lo que indica una forma geométrica intermedia entre puntos (dimensión euclidiana 0) y una curva (dimensión euclidiana 1). Otro fractal típico es la curva o copo de nieve de Koch. Helge von Koch (1904) desarrolló un loop continuo que nunca se intercepta a sí mismo, generando una longitud infinita y una dimensión entre 1 y 2, aprox. 1,28. La forma se consigue partiendo de un triángulo equilátero de lado 1, al que se le añaden en el centro de cada lado otro triángulo equilátero de lado 1/3, y a cada uno de estos 3 de lado 1/9 y así sucesivamente. La longitud o perímetro de la forma será igual a  $3 \cdot 4/3 \cdot 4/3 \dots$  ( $4/3$  por cada iteración), por lo que es infinita. Sin embargo su área si tiene límite y será igual al área del triángulo original ( $A_0$ ) que multiplica  $A_0 \cdot (1/3 + 1/9 + 1/27 \dots + 1/3^n)$ . Entonces cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $A \rightarrow a = \pi/3 \approx 1.05$ . Este valor es menor que el área de la circunferencia en la que estaría inscrito el triángulo original (de radio  $\sqrt{3}/3$ ). Situaciones similares se consiguen con la Alfombra de Sierpinski (un cuadrado se divide en 9 cuadrados iguales y se elimina el central, esto se sigue haciendo igual en cada uno de los cuadrados que rodean al 'hueco' -cuadrado eliminado-, donde largo y ancho pueden tender a infinito, pero la superficie tiende a ser nula) y la Esponja de Menger (se produce igual que la alfombra pero en tres dimensiones, quedando un cubo de lado 1, a cuyas caras se dividen en novenos y se elimina el central, por lo que su superficie tiende a infinito, mientras su volumen tiende a ser nulo) (Gleick, 1987)



$Y_{n+1} = F(Y_n)$ ;  $e$ , la diferencia en las condiciones iniciales, tras  $n$  iteraciones la divergencia entre los puntos es:

$$F^n(Y_0 + e) - F^n(Y_0) \approx e e^{nI}$$

o también:

$$\text{Ln} \left[ \frac{F^n(Y_0 + e) - F^n(Y_0)}{e} \right] \approx nI$$

siendo que la divergencia en las condiciones es mínima,  $e$  tiende a 0, por lo que:

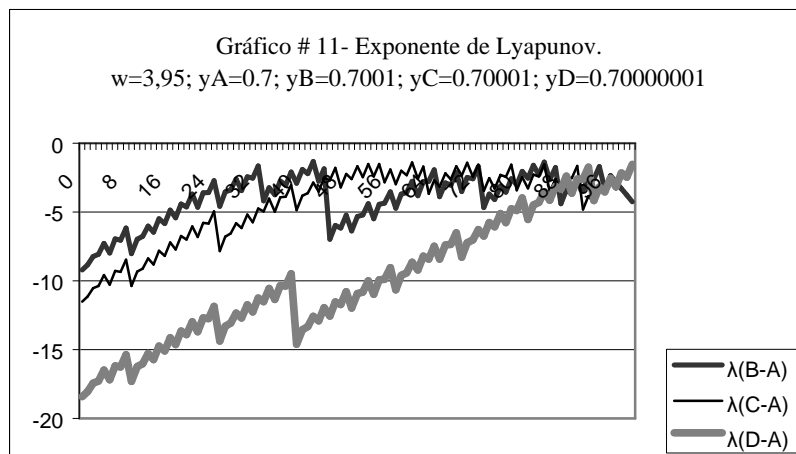
$$I \approx \frac{1}{n} \text{Ln} \left| \frac{dF^n}{dY_0} \right| \lambda$$

utilizando la regla de la cadena:

$$\text{Ln} \left| \frac{dF^n}{dY_0} \right| = \text{Ln} \left| \prod_0^{n-1} F'(Y_i) \right| = \sum_0^{n-1} \text{Ln} |F'(Y_i)|$$

tomando límite cuando  $n$  tiende a infinito:

$$I(Y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \text{Ln} |F'(Y_i)|$$





Para que un atractor sea extraño ha de tener al menos un exponente positivo de Lyapunov:

- Si  $I < 0$  implica contracción, por lo que la serie presenta convergencia.
- Si  $I$  pasa de negativo a nulo de forma alternante, la serie es cíclica.
- Si  $I > 0$  implica alejamiento de los puntos, por lo que la serie presenta una dinámica caótica

El cálculo del exponente de Lyapunov es quizá el método más utilizado para la detección de caos en series de datos de las ciencias naturales, y por lo general estas series poseen entre 10 y 30 mil observaciones.

### VI. ALGUNAS APLICACIONES DE CAOS EN ECONOMÍA

Los avances en los fundamentos de la dinámica no-lineal permite tratar con mayor rigurosidad la inestabilidad y las oscilaciones, analizándolas como emergentes de procesos endógenos del sistema. Muchos autores han tratado de revisar la aplicabilidad de las teorías de caos a la economía partiendo de modelos económicos clásicos y ampliamente aceptados, demostrando que las erráticas fluctuaciones que emergían de los modelos no tenían que ser explicadas como consecuencia de factores exógenos sino como el resultado de dinámicas no-lineales. Entre estos trabajos señalaremos algunos de interés:

- Benhabib y Day (1981) analizan la función de consumo y muestran como la escogencia racional en un estado estacionario puede llevar a un comportamiento errático (comportamiento que en el largo plazo no converge a un valor, ni a un patrón periódico) cuando las preferencias dependen de la experiencia pasada. En este sentido señalan la dificultad que se presenta para predecir el consumo futuro cuando hay presencia de retroalimentación.
- Richard H. Day (1983) muestra cómo fluctuaciones erráticas pueden emerger de un proceso de crecimiento económico en una economía agraria. Para ello utiliza un sencillo modelo de crecimiento de la productividad y la población partiendo de tres elementos: una relación de la tasa neta de crecimiento poblacional y el salario, una función de producción y una función de distribución. A partir de estos elementos se generan dos escenarios posibles: uno en el que la tasa de crecimiento poblacional restringe la tasa de crecimiento (fase biológica) y otro en el cual los medios de subsistencia restringen la tasa de crecimiento (fase de subsistencia). La fase biológica muestra una tasa convergente de crecimiento, mientras que la fase de



subsistencia permite la aparición del caos (en tres casos distintos) cuando se presenta una caída en la función de producción.

- Boldrin y Montrucchio (1986) parten de un modelo neoclásico de crecimiento, y demuestran que cuando el parámetro de descuento, del que depende la estabilidad del proceso de acumulación, es lo suficientemente pequeño, la función óptima de política puede ser de cualquier tipo, posibilitando la aparición del caos. Como consecuencia rechazan la presunción de predictibilidad de las acciones de los agentes.
- Day y Shafer (1985) muestran cómo fluctuaciones no periódicas emergen en un modelo macroeconómico a precios constantes con un desfase en el tiempo, cuando la inversión inducida es lo suficientemente fuerte. Su objetivo es evaluar los resultados macroeconómicos globales en los cuales el interés depende no sólo de la intervención gubernamental, sino de las propiedades no-lineales que en teoría poseen la demanda de dinero y de bienes de inversión. Para ello utilizan una curva LM no-lineal creando una no-linealidad en la función consumo que puede llegar a presentar una dinámica caótica.
- Bhaduri y Harris (1987) rescatan el planteamiento enraizado en la tradición de la economía política que sostiene que el proceso de acumulación capitalista se dirige al estancamiento, sugiriendo que la complejidad del proceso surge de la dinámica del cambio en la distribución y el crecimiento de la población del modelo ricardiano, lo que posibilita la aparición de una dinámica caótica. Su modelo parte de una productividad marginal decreciente, define la renta como la diferencia entre la producción promedio y la marginal y la ganancia como el residuo del ingreso tras el pago de la renta y los salarios. De esta manera resulta un modelo definido por una ecuación no-lineal que expresa el movimiento económico en términos del nivel del empleo. El sistema presentará una dinámica caótica según el valor de la tasa de explotación en un estado de acumulación primitiva.
- Skott (1989) desarrolla un modelo de crecimiento y acumulación para una economía capitalista integrando planteamientos keynesianos (demanda efectiva) y marxistas (lucha de clases y ejército industrial de reserva) y demuestra que el mismo presenta un equilibrio inestable lo que lo lleva a exhibir un comportamiento fluctuante alrededor de la tasa balanceada de crecimiento.
- Berkowitz (1994) utiliza un modelo de dos sectores con capital heterogéneo para demostrar que la inestabilidad del mercado puede generarse restringiendo la intensidad de los factores, la tasa de descuento y la cantidad inicial de capital. Señala que cuando el nivel de capital se acerca al nivel de



equilibrio, los productores pueden encontrar rentable invertir en capital tradicional y mantener niveles de subempleo. El autor prueba que esta dinámica atavística se presenta cuando las empresas productoras de bienes de capital son más intensivas en capital que las de bienes de consumo y descontando el capital inicial quedan apropiadamente restrictas. Finalmente, concluye que la dinámica atavística aleja a la economía de su equilibrio.

- Schönhofer (1999) utiliza un modelo de crecimiento con generaciones superpuestas y hace explícito el proceso de aprendizaje de los agentes, evidenciando la emergencia de dinámicas caóticas. Esto le permite señalar que a los agentes se les dificulta aprender en el proceso pues mucha de la información de la que disponen, simplemente parece ruido. También incorpora el proceso de aprendizaje a la función ahorro y concluye que la sola introducción del proceso de aprendizaje es capaz de generar un comportamiento complejo por lo que considera la necesidad de rechazar la hipótesis de las expectativas racionales.
- Boldrin y otros colegas (2001) construyen un modelo de una economía de dos sectores en la que se producen dos bienes (de consumo e inversión) para describir un crecimiento endógeno en presencia de una externalidad positiva. El modelo presenta acumulación ilimitada y es activado por la presencia de retornos constantes en la producción de bienes de capital y persistentes oscilaciones de los retornos crecientes en la producción de bienes de consumo. Dichos retornos crecientes se deben al efecto externo positivo del nivel de capital agregado. El modelo predice que al incrementarse la externalidad, la tasa de crecimiento oscilará cíclicamente o alrededor de un atractor extraño y concluyen que en presencia de externalidades, las tendencias y ciclos de la producción agregada nacional puede ser generada simultáneamente por mecanismos económicos endógenos.
- Mitra (2001) desarrolla un criterio para demostrar la existencia de caos topológico cuando la dinámica del sistema no presenta un ciclo de grado impar (por lo que no se puede aplicar el teorema de Li-Yorke) y lo aplica a un modelo de crecimiento endógeno con externalidades. El modelo considera una economía de dos sectores que produce dos bienes (consumo e inversión) con un nivel de capital inicial dado, sometido a una depreciación total y con agentes capaces de optimizar sus decisiones de consumo.



### VII. CONSIDERACIONES FINALES

Mientras los supuestos básicos de la dinámica lineal son:

- Los sistemas simples se comportan SIEMPRE de forma simple.
- Los comportamientos complejos se deben a causas complejas, están gobernados por una multitud de causas independientes, o sujetos a influencias externas aleatorias.
- Sistemas distintos se comportan de forma distinta.

Los supuestos de la dinámica no-lineal son:

- Los sistemas simples se pueden comportar en forma compleja.
- Los sistemas complejos pueden deber su comportamiento a una causa simple.
- Las leyes de la complejidad tienen carácter universal.

La mecánica newtoniana fomentó el uso de modelos sencillos, modelos lineales y ésta fue trasladada al campo de las ciencias sociales. Pero la causalidad en las ciencias sociales siempre es compleja y las causas generalmente interactúan de forma no aditiva. De otro lado, lo más notable de la reducción de la naturaleza a leyes determinísticas y temporalmente reversibles es la eliminación de la flecha del tiempo.

El análisis por medio de la teoría del caos, ofrece una nueva forma de tratar vieja data arrumbada, rompiendo los estancos disciplinarios y programas reduccionistas en ciencia. Ofrece la posibilidad de explicar complejos, aleatorios y, a menudo, procesos tildados de incomprensibles, como el resultado de la evolución endógena de los sistemas, rompiendo con el esquema de múltiples explicaciones *ad hoc*. Lo anterior es de gran relevancia para los estudios económicos.

Pero la dinámica no-lineal presenta también escollos para la investigación económica:

- Las prácticas económicas son de naturaleza compleja y multi-causal, por lo que pretender que su complejo comportamiento es el resultado de una causa simple puede resultar reduccionista.



- Las series económicas son el resultado de la combinación de muchas variables cada una de las cuales presentan diferentes comportamientos de rezago en el tiempo. Asimismo, estas series son por lo general muy cortas y cargadas de ruido.
- Por los argumentos anteriores, la verificación de que una serie de datos económica presenta un comportamiento caótico, y no simplemente uno aleatorio, puede resultar bastante complejo.
- Dado su carácter no determinístico, la naturaleza de los resultados de la dinámica no-lineal ofrece reducido espacio para el establecimiento de lineamientos específicos de política económica.

Más allá de las restricciones que presenta esta nueva perspectiva a la práctica económica, permite adentrarnos en una que pone a la multiplicidad, la complejidad y la dinámica por encima de los modelos lineales, automáticos y simplistas; en principio, en mayor sintonía con la actual dinámica económica a revisar.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bahaduri, Amit y Donald Harris (1987), "The complex dynamics of the simple ricardian system", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 102, Nov. (4):893-902.
- Baumol, William J, y Jess Benhabib (1989), "Chaos: significance, mechanism and economic applications", *Journal of Economic Perspectives*, Vol.3, Winter, (1): 77-105.
- Benhabib, Jess y Richard Day (1981), "Rational Choice and Erratic Behaviour", *The Review of Economic Studies*, Vol. 48, Jul.(3), 459-471.
- Berkowitz, Daniel (1994), "Atavistic Dynamics in a Two-Sector Economy", *Journal of Economic Theory*. Vol. 62:238-252.
- Boldrin, Michele et al (2001), "Chaotic Equilibrium Dynamics in Endogenous Growth Models", *Journal of Economic Theory*. Vol. 96:97-132 [doi:10.1006/jet.2000.2677, <http://www.idealibrary.com>]
- Boldrin, Michele y Luigi Montrucchio (1986), " On the Indeterminacy of Capital Accumulation Paths", *Journal of Economic Theory*, Vol. 40:26-39.
- Day, Richard H. (1983), "The Emergence of Chaos from classical economic growth", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 98, May (2):201-213.
- (1994), *Complex Economic Dynamics. Volume I*. MIT Press.



—(1999), *Complex Economic Dynamics. Volume II*. MIT Press.

Day, Richard H. y Wayne Shafer (1985), "Keynesian Chaos", *Journal of Macroeconomics*, Vol.7, Summer (3):277-295.

Gleick, James (1987), *Chaos. Making a New Science*, Viking Penguin Inc. NY.

Hawking, Stephen (1988), *A Brief History of Time*, Bantam Books, Toronto.

Hayles, Katherine (1990), *La Evolución del Caos*, Gedisa Editorial. Barcelona, España.

Li, Tien-Yien y James A. Yorke (1975), "Period Three Implies Chaos", *American Mathematical Monthly*, Vol. 82, Dec.,(10):985-992.

Marx, Karl ([1859]s.f.), *Contribución a la Crítica de la Economía Política*, Ed. Anteo. Bogotá.

Mitra, Tapan (2001), "A Sufficient Condition for Topological Chaos with an Application to a Model of Endogenous Growth", *Journal of Economic Theory*. Vol. 96, 133-152 [doi:10.1006/jet.2000.2738, <http://www.idealibrary.com>]

Prigogine, Ilya (1996), *El Fin de las Certidumbres*, Ed. Andrés Bello. Santiago-Chile. Traducción de *La fin des certitudes* por Pierre Jacomet. Ed. Odile Jacob.

Schönhofer, Martín (1999), "Chaotic Learning Equilibria", *Journal of Economic Theory*. Vol.89, 1-20. [Article ID jet.1999.2509, <http://www.idealibrary.com>]

Skott, Peter (1989), *Conflict and effective demand in economic growth*, Cambridge Univ. Press.